МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

уравнений в частных производных

и теории вероятностей

А.В. Глушко

19.05.2022

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.23 Метод Фурье

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: проф., д.ф.-м.н. Глушко А.В.

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета Протокол **№ 0500-03 от 24.03.2022**

8. Учебный год: 2024/2025 **Семестр(ы): 6**

9.Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- выработать способность применять фундаментальные знания, полученные в ходе изучения курса Уравнений с частными производными и других математических и естественно-научных курсов для освоения основ метода решения задач для уравнений с частными производными с помощью их разложений в ряды по собственным функциям;
- понимать и формулировать основные проблемы и модели, исследуемые в курсе УЧП и решать их с помощью метода, известного под названиями «Метод разделения переменных» или «Метод Фурье»;
- анализировать и применять Метод Фурье в практике построения решений задач для уравнений с частными производными различных типов с помощью их разложения в ряды Фурье.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение метода Фурье при решении краевых задач гиперболического, параболического и эллиптического типов
- получение навыков использования метода Фурье для решения задач профессиональной направленности на основе теоретических знаний.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Метод Фурье» относится к Блоку 1 Обязательной части, т.е. является обязательной дисциплиной для изучения обучающимися.

Для её успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курса обыкновенных дифференциальных уравнений, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств.

Знание методов построения решений с помощью разделения переменных для начальных, краевых и начально-краевых задач для уравнений с частными производными является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, построение решений задач для уравнения с частными производными с помощью различного вида рядов по собственным функциям является отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

Дисциплина является предшествующей для курсов: Численные методы, Методы оптимизаций и всех специальных курсов, изучающих задачи математической физики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Применяет базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; классификацию уравнений в частных производных; основные методы доказательства математических утверждений Уметь: формулировать постановки основных задач математической физики, формулировать и доказывать теоремы существования, единственности, корректной постановки задач для уравнений с частными производными, доказывать теоремы сходимости рядов Фурье, представляющих решения соответствующих задач

				Владеть: теоретическими подходами решению задач на собственные решения для краевых, начальных, начально-краевых задач для уравнений в частных производных, моделирующих различные процессы; навыками работы в информационных и вычислительных системах
		ОПК-1.2	Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Способен изучать и творчески использовать современную зарубежную и отечественную литературу в области уравнений в частных производных, общие формы закономерности теории уравнений с частными производными Уметь: грамотно и правильно представлять свои результаты в виде математической статьи, рукописи, реферата Владеть: источниками информации, навыками работы с литературой, информационными системами
		ОПК-1.3.	Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать: методы построения решений задач для уравнений с частными производными с помощью разделения переменных Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в области уравнений с частными производными

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — __2__/__72___.

Форма промежуточной аттестации__Зачет – 6 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			6 семестр
Контактная работа		32	32
в том числе:	лекции	16	16
	практические	16	16
	лабораторные	-	-
Самостоятельная работа		40	40
Втом числе: курсовая работа (проект)			
Промежуточная аттестация		-	-
Итого:		**72**	**72**

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
1. Лекции			
1.1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Разделение переменных. Собственные значения $\lambda_k=(\pi k/l)^2$ и собственные функции $X_k(x)=\sin(\pi kx/l),\ k=1,2,\ldots$. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.	Глушко А.В. Уравнения математической физики: учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с./ http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-V84UE2uQ5P.pdf https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5536&notifyeditingon=1
1.2	Сведения из теории ОНС в гильбертовом пространстве	Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H. Минимизирующее свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Лемма (о полноте) для ортонормированной системы в гильбертовом пространстве H.	
1.3	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны. Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях	
1.4	Общая схема метода Фурье	Лемма об ортогональности собственных функций с весом $\rho(x)$. Лемма о неотрицательности собственных значений. Построение формального решения..	
1.5	Вынужденные колебания струны	Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Вынужденные колебания струны с подвижными концами.	
1.6	Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.	

1.7	Задача Дирихле для уравнения Лапласа	Представление оператора Лапласа в полярных координатах. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости.	
		2. Практические занятия	
2.1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Разделение переменных. Собственные значения $\lambda_k = (\pi k / l)^2$ и собственные функции $X_k(x) = \sin(\pi kx / l),\ k = 1, 2, \ldots$. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны. Построение частных решений и решения начально-краевой задачи.	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с./ http://www.kuchp.ru/uploads/files/public/Files-Ul2cc94WWv.pdf https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=5536&notifyeditingon=1
2.2	Сведения из теории ОНС в гильбертовом пространстве	Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве H. Минимизирующее свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Лемма (о полноте) для ортонормированной системы в гильбертовом пространстве H.	
2.3	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны. Постановка задачи. Разделение переменных. Лемма о линейно независимых собственных функциях.	
2.4	Общая схема метода Фурье	Лемма об ортогональности собственных функций с весом $\rho(x)$. Лемма о неотрицательности собственных значений. Построение формального решения.	
2.5	Вынужденные колебания струны	Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Вынужденные колебания струны с подвижными концами.	
2.6	Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	Решение первой краевой задачи в прямоугольнике для однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями и неоднородными граничными условиями.	

2.7	Задача Дирихле для уравнения Лапласа	Представление оператора Лапласа в полярных координатах. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге на плоскости. Контрольная работа.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны.	2	2		5	11
02	Сведения из теории ОНС в гильбертовом пространстве	2	2		4	8
03	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны	1	1		7	7
04	Общая схема метода Фурье	5	3		6	14
05	Вынужденные колебания струны	2	3		6	11
06	Первая краевая задача для уравнения теплопроводности	2	2		8	12
07	Задача Дирихле для уравнения Лапласа	2	3		4	9
	Итого:	16	16		40	72

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Метод Фурье» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После лабораторного занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в часы контактной работы с преподавателем.

3. При подготовке к практическим лабораторным занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

5. Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru .

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 40 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Метод Фурье» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольная работа и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятия обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (6 семестр – зачет)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (6 семестр – зачет).

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. . // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система.. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
	Глушко А.В. Уравнения математической физики: учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=cat&id=28
1	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
3	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.
4	Глушко В.П. Курс уравнений математической физики с использованием пакета Mathematica. Теория и технология решения задач : учеб. пособие / В.П. Глушко, А.В. Глушко. – СПб : Лань, 2010. – 320 с. илл. (+CD).

в) информационные электронно-образовательные ресурсы

№ п/п	Ресурс
1	*http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений*
2	*http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ*
3	*http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=cat&id=28* *файловый архив сайта кафедры УЧПиТВ математического факультета ВГУ*
4	*ЭБС «Университетская библиотека онлайн»*
5	*Электронный курс:* УЧП https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=14048

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М : Физматлит, 2003. – 398 с.
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов. – М : Физматлит, 2003. – 286 с.
3	Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. *http://www.kuchp.ru/index.php?name=Files&op=cat&id=28* *файловый архив сайта кафедры УЧПиТВ математического факкультета ВГУ*

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=14048).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, Calc, Math, браузер Mozilla Firefox, Opera или Google Chrome.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

1. Учебная аудитория со специализированной мебелью
2. Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны	ОПК-1	ОПК-1.1	Домашние задания, контрольная работа
2	Сведения из теории ОНС в гильбертовом пространстве		ОПК-1.1	Домашние задания, контрольная работа
3	Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны		ОПК-1.1	Домашние задания, контрольная работа
4	Общая схема метода Фурье		ОПК-1.2	Домашние задания, контрольная работа
5	Вынужденные колебания струны		ОПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа
6	Первая краевая задача для уравнения теплопроводности		ОПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа
7	Задача Дирихле для уравнения Лапласа		ОПК-1.3	Домашние задания, контрольная работа
Промежуточная аттестация Форма контроля - зачет				Набор типовых заданий зачету

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Домашние задания:

По теме 1. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 87.1 – 87.4

По теме 2. Сведения из теории ОНС в гильбертовом пространстве

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задание № 88.1

По теме 3 Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 88.2 – 88.3

По теме 4 Общая схема метода Фурье

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

По теме 5. Вынужденные колебания струны

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 89.1 – 89.2

По теме 6. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 90.1 – 90.4

По теме 7. Задача Дирихле для уравнения Лапласа

Глушко А.В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с.

Задания №№ 91.2 – 91.3

Текущая аттестация – Контрольная работа.

Примеры заданий контрольной работы.

Контрольная работа по Методу Фурье.

Вариант

1. Методом Фурье решить задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; x \in [0;l], \, t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \; x \in [0;l] \end{cases}$$

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Описание технологии проведения

Тестирование и контрольные работы проводятся письменно.

Контрольная работа

Критерии оценки:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если он правильно решил задачу;
- оценка «не зачтено» выставляется студенту, если его знания не удовлетворяет вышеприведенным требованиям на положительную оценку.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Метод Фурье» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На зачете оценивается практический уровень освоения дисциплины «Уравнения с частными производными» и степень сформированности компетенции. Критерии выставления зачета приведены выше.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации (пример)

1. Найти решение следующей начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 2h\frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0,$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

где $0 < x < l, a = const, h = const, h < \dfrac{\pi a}{l}$.

2._ Решить следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t) + 2\sin 2x \sin x,$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = 0.$$

3. Решить следующую краевую задачу

$$\Delta u = 0;\ 0 \le r < r_0;$$

$$u\big|_{r=r_0} = a\cos^3\varphi + b\sin^3\varphi + p\cos\varphi + q\sin\varphi + c.$$

За промежуточную аттестацию ставится оценка «зачтено», в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающий выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «не зачтено».

Зачет выставляется по итогам текущей аттестации.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Перечень заданий для оценки сформированности компетенции:

Задания закрытого типа с выбором ответа(выбор одного варианта ответа, верно/неверно) **Test1-5:**

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Test1

В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ x \in [0;l], \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля:

Варианты ответов:

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

Ответ: 1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$.

Test2

В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l],\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача Штурма-Лиувилля (варианты ответов):

1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$

Ответ: 1) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ x \in [0;l], \\ X(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

Test3.

Рассмотрим задачу $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 \le x \le l, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \ t \ge 0. \end{cases}$

Являются ли собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лувилля функции….

Варианты ответов:

$1.\sin\left(\frac{3\pi}{2l}\right)x$

$2.\sin(2\pi)x$

$3.\cos\left(\frac{5\pi}{2l}\right)x$,;

$4.\cos(9\pi)x$

!Solution

Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;l), \\ X(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

Решения этой задачи: $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$, $X(0)=0\Leftrightarrow C_1=0$, $X'(x)=\lambda C_2\cos\lambda x$,

$$X'(l)=\lambda C_2\cos\lambda l=0\Rightarrow \lambda l=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\Rightarrow \lambda=\frac{(2k+1)\pi}{2l}\Rightarrow$$

$X_k(x)=\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x, k=0,1,2,...$ тогда при $k=1\Rightarrow X_1(x)=\sin\left(\frac{3\pi}{2l}\right)x$

Ответ: $1.\sin\left(\frac{3\pi}{2l}\right)x$

Test4.

Функции $\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)$, где $k=1,2,...$ являются собственными функциями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

Варианты ответов:

1) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$

2) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$

3) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X'(l)=0, \end{cases}$

4) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$

!Solution

Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;l), \\ X(0)=0, X(l)=0. \end{cases}$$

Решения этой задачи: $X_k(x)=\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)$,

удовлетворяют уравнению и граничным условиям

$X_k(0)=0, X_k(l)=0.$

$X_k(0)=\sin\left(\frac{\pi k\cdot 0}{l}\right)=\sin 0=0$, $X_k(l)=\sin\left(\frac{\pi kl}{l}\right)=\sin\pi k=0, k=1,2,3,...$

Ответ: 1) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$

Test5.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ \ 0<x<l,\ t>0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\ \ 0\le x\le l, \\ u(x,0)=\varphi_0(x),\quad t\ge 0. \end{cases}$$

Являются ли собственными функциями соответствующей задачи Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;l), \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

функции …

Варианты ответов:

$\cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x$

2. $\cos(5\pi)x$

3. $\sin\left(\frac{3\pi}{l}\right)x$,;

4. $\sin\left(\frac{9\pi}{2l}\right)x$

!Solution

Рассмотрим задачу Штурма-Лувилля

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ x\in(0;l), \\ X'(0)=0, X'(l)=0. \end{cases}$$

Решения этой задачи: $X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x$, $X'(x)=-\lambda C_1\sin\lambda x+\lambda C_2\cos\lambda x$, $X'(0)=0\Leftrightarrow C_2=0$,

$X'(l)=-\lambda C_1\sin\lambda l=0\Rightarrow \lambda l=k\pi, k\in Z\Rightarrow \lambda=\frac{k\pi}{l}\Rightarrow X_k(x)=\cos\frac{k\pi}{l}x, k=0,1,2,...$ тогда при $k=1\Rightarrow X_1(x)=\cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x$.

Ответ: 1) $\cos\left(\frac{\pi}{l}\right)x$

Задания открытого типа (короткий текст): **!Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task6 **Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

Функции

$\sin\left(\frac{\pi(2k+1)x}{2l}\right)$, где $k=0,1,2,...$ являются …………. функциями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ x\in[0;l], \\ X(0)=0, X'(l)=0, \end{cases}$$

!Ответ

собственными

собственной

!Task7

Продолжите предложение: задача для дифференциального уравнения с частными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x)$$

называется: начальной задачей для уравнения………………. типа.

!Ответ

параболического

параболический

!Task8

В результате решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l], \; t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \; x \in [0;l] \end{cases}$$

методом Фурье возникает следующая задача $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; x \in [0;l], \\ X'(0) = 0, X(l) = 0, \end{cases}$

называющаяся задачей ……….:

!Ответ

Штурма-Лиувилля

!Task9

Задача для дифференциального уравнения с частными производными и заданными граничными и начальными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0;l], \; t > 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = 0, \; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x), \; x \in [0;l] \end{cases}$$

называется начально-граничной задачей для уравнения …….

!Ответ

теплопроводности

параболического типа

!Task10

Уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ это уравнение ……….

!Ответ

Лапласа

или

эллиптического типа

производными и заданным начальным условием:

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).